PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

JAN BŁAŻ

O istnieniu i ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowo-całkowych z opóźnionym argumentem

W pracy [3] zajmowałem się istnieniem i pewnymi własnościami asymptotycznymi rozwiązań układu równań różniczkowych, postaci

$$
(1)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(t) = \omega_\nu(t) & \text{dla} \quad t\in(-\infty, A\rangle \\ \varphi_\nu'(t) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} f_{\nu\mu}(t, \varphi_1(t-s), \ldots, \varphi_n(t-s))\, d_s r_{\nu\mu}(t, s) + g_\nu(t) & \end{cases}
$$

$$
\text{dla} \quad t\in\langle A, B), \ B\leqslant +\infty, \ \nu = 1, 2, \ldots, n.
$$

Przy stosownych, dość silnych założeniach o funkcjach $f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\omega_\nu(t)$, $r_{\nu\mu}(t, s)$ i $g_\nu(t)$ wykazałem istnienie rozwiązań układu (1) i podałem warunki wystarczające na to, aby rozwiązania te były ograniczone (lub nieograniczone) w przedziale $\langle A, B)$.

W niniejszej nocie uogólniam wyniki pracy [3], nakładając na funkcje $f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)$ mniej krępujące ograniczenia.

1. Przyjmuję, że funkcje $\omega_\nu(t)$, $f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $r_{\nu\mu}(t, s)$ oraz $g_\nu(t)$, występujące w równaniu (1) są dane i spełniają następujący układ założeń:

Założenia Z.

1° Funkcje $f_{\nu\mu}(r, x_1, \ldots, x_n)$ są ciągłe dla $t\in\langle A, B)$ i dla dowolnych wartości zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ oraz spełniają warunek

$$
(2)\qquad |f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \Phi_{\nu\mu}(t, |x_1|, \ldots, |x_n|), \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n,
$$

gdzie symbolem $\Phi_{\nu\mu}(t, y_1, \ldots, y_n)$ oznaczono pewne funkcje ciągłe, nieujemne dla $t\in\langle A, B)$, $y_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ i niemalejące względem zmiennych $y_1, \ldots, y_n$ *).

2° Jądra $r_{\nu\mu}(t, s)$ są określone dla $t\in\langle A, B)$, $s\geqslant 0$ oraz spełniają warunek $r_{\nu\mu}(t, 0)\equiv 0$ dla $t\in\langle A, B)$.

3° Istnieją funkcje $v_{\nu\mu}(t)$ ciągłe i nieujemne dla $t\in\langle A, B)$, takie że $\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} r_{\nu\mu}(t, s)\leqslant$ $\leqslant v_{\nu\mu}(t)$ dla $t\in\langle A, B)$.

4° Układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$
(3)\qquad y_\nu'(t) = \Psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,
$$

*) Tzn. że jeśli $y_1\leqslant\bar{y}_1, \ldots, y_n\leqslant\bar{y}_n$, to $\Phi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)\leqslant\Phi_\nu(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$.

gdzie $\Psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\mu=1}^{n} \Phi_{\nu\mu}(t, y_1, \ldots, y_n) v_{\nu\mu}(t)$, posiada wszystkie całki górne przedłużalne na cały przedział $\langle A, B)$.

5° Dla dowolnego $\eta > 0$ istnieje liczba $K > 0$, taka że wahanie funkcji $r_{\nu\mu}(t, s)$ w przedziale $\langle K, +\infty)$ spełnia nierówność $\bigvee_{s=K}^{\infty} r_{\nu\mu}(t, s) \leqslant \eta$, dla $t \in \langle A, B)$.

6° Dla dowolnego $k > 0$ oraz $u \in \langle A, B)$ jest

$$\lim_{t \to u} \int_u^k |r_{\nu\mu}(t, s) - r_{\nu\mu}(u, s)| \, ds = 0, \qquad t \in \langle A, B).$$

7° Funkcje $g_\nu(t)$ są ciągłe dla $t \in \langle A, B)$, zaś funkcje $\omega_\nu(t)$ są ciągłe i ograniczone dla $t \in (-\infty, A\rangle : |\omega_\nu(t)| \leqslant \Omega_\nu = \text{const}$.

Jak pokazano w pracy [1], założenia Z wystarczają na to, aby funkcje

$$\Theta_{\nu\mu}(t) = \int_0^\infty f_{\nu\mu}(t, \varphi_1(t-s), \ldots, \varphi_n(t-s)) \, d_s r_{\nu\mu}(t, s)$$

były ciągłe dla $t \in \langle A, B)$, o ile tylko funkcje $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ są ciągłe dla $u \in (-\infty, B)$. Przyjmując powyższe założenia wykażemy istnienie rozwiązań układu (1) i udowodnimy pewne twierdzenia o ograniczoności tych rozwiązań.

2. Twierdzenie 1. *Jeżeli są spełnione założenia Z, to układ równań* (1) *posiada co najmniej jedno rozwiązanie* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, *określone w całym przedziale* $\langle A, B)$.

D o w ó d tego twierdzenia nie różni się w istocie od podanego w pracy [3]. Stosując metodę Tonelliego zbudujmy mianowicie n ciągów funkcyjnych $\varphi_\nu^i(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, 3, \ldots$, w sposób następujący

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_\nu^i(t) = \omega_\nu(t) & \text{dla} \quad t \in (-\infty, A\rangle \\ \varphi_\nu^i(t) = \omega_\nu(A) + \sum\limits_{\mu=1}^{n} \int\limits_A^{t_i} \Big\{ \int\limits_0^\infty f_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1^i(\tau - s), \ldots, \varphi_n^i(\tau - s)) \, d_s r_{\nu\mu}(\tau, s) \Big\} d\tau & \end{cases}$$

$$+ \int_A^t g_\nu(\tau) \, d\tau, \qquad \text{dla} \quad t \in \langle A, B), \ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $t_i = \max\left[A, t - \dfrac{1}{i}\right]$.

Łatwo widać, że funkcje $\varphi_\nu^i(t)$ są określone i ciągłe w przedziale $(-\infty, B)$.

Jest oczywiste, że są one wspólnie ograniczone w przedziale $(-\infty, A\rangle$. Pokażemy teraz, że funkcje $\varphi_\nu^i(t)$ są wspólnie ograniczone w każdym przedziale domkniętym $\langle A, b\rangle$, zawartym w przedziale $\langle A, B)$.

Wprowadźmy w tym celu oznaczenia

$$(5) \qquad G_\nu(t) = \left| \int_A^t g_\nu(\tau) \, d\tau \right|$$

$$(6) \qquad A_\nu^i(t) = \sup_{u \leqslant t} |\varphi_\nu^i(u)|$$

$$(7) \qquad \Gamma_\nu(b) = \Omega_\nu + \max_{A \leqslant t \leqslant b} G_\nu(t)$$

i przyjmijmy, że $A \leqslant u \leqslant t \leqslant b$.

Z określeń (4), wobec założeń 1° i 3° Z, mamy

$$|\varphi_\nu^i(u)| \leqslant |\omega_\nu(A)| + \sum_{\mu=1}^{n} \int_A^{u_i} \max_{s \geqslant 0} |f_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1^i(\tau-s), \ldots, \varphi_n^i(\tau-s))| \bigvee_{s=0}^{\infty} r_{\nu\mu}(\tau, s)\, d\tau +$$

$$+ \left| \int_A^u g_\nu(\tau)\, d\tau \right| \leqslant |\omega_\nu(A)| + \sum_{\mu=1}^{n} \int_A^{u_i} \max_{s \geqslant 0} \Phi_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1^i(\tau-s), \ldots, \varphi_n^i(\tau-s))\, v_{\nu\mu}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left| \int_A^u g_\nu(\tau)\, d\tau \right| = |\omega_\nu(A)| + \int_A^u \Psi_\nu(\tau, \Lambda_1^i(\tau-s), \ldots, \Lambda_n^i(\tau-s))\, d\tau + \left| \int_A^u g_\nu(\tau)\, d\tau \right|.$$

Stąd, wykorzystując oznaczenie (7), otrzymujemy nierówność całkową

$$\Lambda_\nu^i(t) \leqslant \Gamma_\nu(b) + \int_A^t \Psi_\nu(\tau, \Lambda_1^i(\tau), \ldots, \Lambda_n^i(\tau))\, d\tau, \qquad t \in \langle A, b \rangle, \tag{8}$$

z której na mocy twierdzenia Z. Opiala [5] wynika nierówność

$$\Lambda_\nu^i(t) \leqslant q_\nu(t), \qquad t \in \langle A, b \rangle, \tag{9}$$

gdzie symbolem $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ oznaczono całkę górną w prawo układu równań różniczkowych (3), wychodzącą z punktu $(A, \Gamma_1(b), \ldots, \Gamma_n(b))$.

Z nierówności (9) wynika, że funkcje $\varphi_\nu^i(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, są wspólnie ograniczone w każdym z przedziałów $(-\infty, b\rangle$, gdzie $b \in \langle A, B)$.

Pokażemy jeszcze, że funkcje te są jednakowo ciągłe w przedziale $(-\infty, b\rangle$. Przyjmijmy w tym celu, że liczby t oraz $t+h > t$ należą do przedziału $\langle A, b\rangle$; wtedy z równań (4) wynika, że

$$R_\nu^i = |\varphi_\nu^i(t+h) - \varphi_\nu^i(t)| \leqslant \sum_{\mu=1}^{n} \int_{t_i}^{t_i+h} \left| \int_0^\infty f_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1^i(\tau-s), \ldots, \varphi_n^i(\tau-s))\, d_s r_{\nu\mu}(\tau, s) \right| d\tau +$$

$$+ \left| \int_t^{t+h} g_\nu(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \sum_{\mu=1}^{n} \int_{t_i}^{t_i+h} \max_{s \geqslant 0} \Phi_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1^i(\tau-s), \ldots, \varphi_n^i(\tau-s))\, v_{\nu\mu}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left| \int_t^{t+h} g_\nu(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_{t_i}^{t_i+h} {}_\nu(\tau, \Lambda_1^i(\tau), \ldots, \Lambda_n^i(\tau))\, d\tau + \int_t^{t+h} |g_\nu(\tau)|\, d\tau \leqslant K(b)\, h,$$

gdzie $K(b)$ oznacza pewną funkcję rosnącą zmiennej b. Wynika stąd jednakowa ciągłość funkcji $\varphi_\nu^i(t)$ w przedziale $\langle A, b\rangle$; dowód jednakowej ciągłości rozważanych funkcji w przedziale $(-\infty. b\rangle$ nie przedstawia już, wobec założenia 7° i określeń (4), żadnych trudności.

Analogicznie jak w pracy [3] pokazuje się, że z ciągu $\varphi_\nu^i(t)$ można wybrać podciąg, który przy każdym ustalonym $\nu(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ jest zbieżny w całym przedziale $(-\infty, B)$ do pewnej funkcji $\varphi_\nu(t)$, przy czym zbieżność ta jest jednostajna w każdym przedziale $(-\infty, b\rangle$, gdzie $b < B$. Tak samo pokazuje się, że funkcje $\varphi_\nu(t)(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ spełniają, równoważny układowi (1), układ równań całkowych:

$$\begin{cases} \varphi_\nu(t) = \omega_\nu(t) \quad \text{dla} \quad t \leqslant A \\ \varphi_\nu(t) = \omega_\nu(A) + \sum\limits_{\mu=1}^{n} \int\limits_A^t \left\{ \int\limits_0^\infty f_{\nu\mu}(\tau, \varphi_1(\tau-s), \ldots, \varphi_n(\tau-s))\, d_s r_{\nu\mu}(\tau, s) \right\} d\tau \end{cases} \tag{10}$$

$$+ \int_A^t g_\nu(\tau)\, d\tau, \quad \text{dla} \quad A \leqslant t < B, \; \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Tym samym dowód twierdzenia 1 został zakończony.

3. Dla zbadania ograniczoności rozwiązań układu równań (1) przyjmijmy następujące założenia:

Założenia H.

1° Zachodzą założenia Z, wystarczające dla istnienia rozwiązania układu równań (1).

2° Funkcje $G_\nu(t)$, określone wzorem (5), są ograniczone w przedziale $\langle A, B)$: $\sup\limits_{A\leqslant t<B} G_\nu(t)=K_\nu=\text{const}$, $\nu=1,2,\dots,n$.

3° Całka górna w prawo układu równań różniczkowych zwyczajnych (3), wychodząca z punktu $(A, C_1, \dots, C_n)$, gdzie $C_\nu=K_\nu+\Omega_\nu$, $\nu=1,2,\dots,n$, jest ograniczona w przedziale $\langle A, B)$: $|q_\nu(t)|\leqslant M_\nu=\text{const}$, $\nu=1,2,\dots,n$.

4° Dla każdego ustalonego punktu $(\mathring{y}_1, \dots, \mathring{y}_n)$ zbieżna jest całka

$$\gamma_\nu(t) = \int\limits_A^t \Psi_\nu(\tau, \mathring{y}_1, \dots, \mathring{y}_n)\,d\tau. \tag{11}$$

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli spełnione są założenia H, to każde rozwiązanie $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ układu równań* (1) *jest ograniczone w przedziale $\langle A, B)$ oraz istnieją granice*

$$\lim_{t\to B-0} \Big|\varphi_\nu(t)-\int\limits_A^t g_\nu(\tau)\,d\tau\Big|, \qquad \nu=1,2,\dots,n. \tag{12}$$

Dowód. Z założenia 1° H i z twierdzenia 1 wynika, że istnieje rozwiązanie $\varphi_\nu(t)$, $\nu=1,2,\dots,n$, układu (1), odpowiadające danym funkcjom początkowym $\omega_\nu(t)$, $\nu=1,2,\dots,n$. Po łatwych obliczeniach otrzymujemy nierówność całkową

$$\Lambda_\nu(t)\leqslant C_\nu+\int\limits_A^t \Psi_\nu(\tau, \Lambda_1(\tau), \dots, \Lambda_n(\tau))\,d\tau, \qquad t\in\langle A, B),$$

gdzie $\Lambda_\nu(t)=\sup\limits_{u\leqslant t}|\varphi_\nu(u)|$, zaś funkcje $G_\nu(t)$ zostały określone wzorem (5). Z nierówności tej wynika, że

$$\Lambda_\nu(t)\leqslant\tilde{q}_\nu(t) \quad \text{dla} \quad t\in\langle A, B),\ \nu=1,2,\dots,n, \tag{13}$$

przy czym symbolem $\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_n(t)$ oznaczono tu całkę górną w prawo układu równań (3), wychodzącą z punktu $(A, C_1, \dots, C_n)$. Z nierówności (13) i z założenia 3° H wnioskujemy o ograniczoności rozwiązania $\varphi_\nu(t)$; zatem

$$|\varphi_\nu(t)|\leqslant N_\nu=\text{const}, \qquad t\in\langle A, B),\ \nu=1,2,\dots,n, \tag{14}$$

co kończy dowód pierwszej części tezy.

Połóżmy teraz

$$\varrho_\nu(t)=\varphi_\nu(t)-\int\limits_A^t g_\nu(\tau)\,d\tau$$

i niech $A\leqslant t\leqslant s<B$; z równań (10) wyniknie, że wtedy

$$|\varrho_\nu(s)-\varrho_\nu(t)|\leqslant\int\limits_t^s \Psi_\nu(\tau, \Lambda_1(\tau), \dots, \Lambda_n(\tau))\,d\tau\leqslant\int\limits_t^s \Psi_\nu(\tau, N_1, \dots, N_n)\,d\tau,$$

dla $\nu=1, 2, \ldots, n$. Z założenia 4° H wnosimy, że ostatni człon powyższej nierówności dąży do zera gdy $t \to B-0$, co dowodzi istnienia granic (12). Tym samym twierdzenie 2 zostało udowodnione.

Uwaga. Z twierdzenia 2 wynika, że jeśli spełnione są jego założenia i jeśli dla pewnego wskaźnika ν istnieje granica

$$\lim_{t \to B-0} \int_A^t g_\nu(\tau)\, d\tau,$$

to istnieje granica odpowiedniej składowej rozwiązania $\varphi_\nu(t)$ przy $t \to B-0$.

Z twierdzenia tego wnioskujemy dalej, że jeśli któraś z funkcji $G_\nu(t)$ nie jest ograniczona w przedziale $\langle A, B)$, lecz są spełnione pozostałe założenia twierdzenia 2, to któraś z funkcji $\varphi_\nu(t)$ jest też nieograniczona, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby dla $\nu=1, 2, \ldots, n$:

$$G_\nu(t) = \Big| \int_A^t g_\nu(\tau)\, d\tau \Big| \leqslant |\varphi_\nu(t)| + |\varrho_\nu(t)| \leqslant N_\nu + \int_A^t \Psi_\nu(\tau, N_1, \ldots, N_n)\, d\tau < +\infty,$$

co przeczy założeniu, że nie wszystkie $G_\nu(t)$ są ograniczone.

4. Pewne przypadki szczególne. Udowodnione twierdzenia uogólniają wyniki uzyskane w pracy [3]. Istotnie, przyjmijmy że spełnione są założenia 2°, 3°, 5°, 6°, 7° Z oraz założenia 1° Z z tym, że zamiast nierówności (2) spełniona jest nierówność

$$(15) \qquad |f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_{\nu\mu}(t) + \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{\nu\mu\varkappa}(t)\, |x_\varkappa|\,; \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $A_{\nu\mu}(t)$ i $B_{\nu\mu\varkappa}(t)$ oznaczają pewne funkcje ciągłe i nieujemne w przedziale $\langle A, B)$. Wtedy układ równań różniczkowych (3) ma postać

$$(16) \qquad y'_\nu(t) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \Big[\sum_{\mu=1}^{n} B_{\nu\mu\varkappa}(t)\, v_{\nu\mu}(t) \Big] y_\varkappa + \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}(t)\, v_{\nu\mu}(t).$$

Z przyjętych założeń o funkcjach $A_{\nu\mu}(t)$ i $B_{\nu\mu\varkappa}(t)$ wynika, że rozwiązanie układu równań (16), wychodzące z punktu $(A, C_1, \ldots, C_n)$ jest monotoniczne. Zakładając więc, że

$$(17) \qquad \int_A^\infty A_{\nu\mu}(t)\, v_{\nu\mu}(t)\, dt < +\infty \qquad \text{oraz} \qquad \int_A^\infty B_{\nu\mu\varkappa}(t)\, v_{\nu\mu}(t)\, dt < +\infty,$$

stwierdzamy na mocy twierdzenia B. P. DEMIDOWICZA [4], że rozwiązanie układu (16) spełniające warunek początkowy $(A, C_1, \ldots, C_n)$ jest ograniczone. Oznacza to, że spełnione jest założenie 3° H; założenia (17) gwarantują oczywiście zbieżność całki (11), występującej w założeniu 4° H. Przyjmując więc jeszcze, że zachodzi założenie 2° H, możemy sformułować następujące

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli są spełnione założenia* 2°, 3°, 5°, 6°, 7° Z, *warunki* (15) *i* (17) *oraz założenie* 2° H, *to istnieje rozwiązanie układu równań* (1); *każde rozwiązanie jest ograniczone w przedziale* $\langle A, B)$ *oraz istnieją granice* (12).

Przyjmijmy teraz, że zachodzą założenia Z z tym, że nierówność (2) zastąpimy nierównością

$$(18) \qquad |f_{\nu\mu}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_{\nu\mu}(t) B_{\nu\mu}(|x_1|, \ldots, |x_n|),$$

gdzie $A_{\nu\mu}(t)$ oznacza funkcje ciągłe i nieujemne w przedziale $\langle A, B)$, zaś $B_{\nu\mu}(y_1, \ldots, y_n)$ ciągłą i nieujemną funkcję argumentów $y_1, \ldots, y_n (y_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n)$, niemalejącą względem tych argumentów. Wtedy układ równań (3) przyjmie postać

$$(19) \qquad y_\nu'(t) = \sum_{\mu=1}^{n} C_{\nu\mu}(t) B_{\nu\mu}(y_1, \ldots, y_n), \quad \text{gdzie} \quad C_{\nu\mu}(t) = A_{\nu\mu}(t) v_{\nu\mu}(t).$$

Załóżmy ponadto, że zbieżna jest całka

$$(20) \qquad \int_A^\infty C_\nu(t)\, dt, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad C_\nu(t) = \max_\mu C_{\nu\mu}(t),$$

oraz że funkcje $G_\nu(t)$, określone wzorem (5), są ograniczone w przedziale $\langle A, B)$. Tym samym spełnione są założenia 1°, 2° i 4° H. Pokażemy, że zachodzi też założenie 3° H. Niech więc $y_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, oznacza rozwiązanie układu równań (19), wychodzące z punktu $(A, C_1, \ldots, C_n)$; wtedy, przyjmując oznaczenia:

$$B_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} B_{\nu\mu}(t), \quad y(t) = \max_\nu y_\nu(t), \quad B_\nu^*(u) = B_\nu(u, \ldots, u),$$

otrzymamy

$$y_\nu(t) = C_\nu + \int_A^t \sum_{\mu=1}^{n} C_{\nu\mu}(\tau) B_{\nu\mu}(y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_\nu + \int_A^t C_\nu(\tau) B_\nu(y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau))\, d\tau \leqslant C_\nu + \int_A^t C_\nu(\tau) B_\nu^*(y(\tau))\, d\tau.$$

Otrzymujemy stąd nierówność całkową

$$(21) \qquad y(t) \leqslant C + \int_A^t C(\tau) B^*(y(\tau))\, d\tau,$$

gdzie $C = \max_\nu C_\nu$, $C(t) = \max_\nu C_\nu(t)$, $B^*(u) = \max_\nu B_\nu^*(u)$, z której, na mocy znanego twierdzenia Bihariego [2], wynika nierówność

$$(22) \qquad y(t) \leqslant R^{-1}[R(C) + \int_A^t C(\tau)\, d\tau], \quad t \in \langle A, B),$$

przy czym

$$R(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{B^*(t)}, \quad u > u_0 > 0.$$

Z założenia (20) i nierówności (22) wynika ograniczoność rozwiązania $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ układu równań (19), wychodzącego z punktu $(A, C_1, \ldots, C_n)$. Można zatem wypowiedzieć

Twierdzenie 4. *Jeżeli są spełnione założenia Z, nierówności* (18) *i* (20) *oraz jeżeli funkcje $G_\nu(t)$ są ograniczone w przedziale $\langle A, B)$, to istnieje w tym przedziale rozwiązanie układu* (1), *każde rozwiązanie tego układu jest ograniczone oraz istnieją granice* (12).

CYTOWANA LITERATURA

[1] A. Bielecki, M. Maksym: *Sur une généralisation d'un théorème de A. D. Muichkis*, Biuletyn Lubelskiego Towarzystwa Naukowego, 2 (1962).

[2] I. Bihari: *A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 81—94.

[3] J. Błaż: *O istnieniu i ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowych z opóźnionym argumentem*, Prace Matem., VIII (1963), 45—53.

[4] Б. П. Демидович: *Од ограниченности решений систем линейных дифференциальных урабнений*, *УМН*, XII 2 (74), (1957), 143—146.

[5] Z. Opial: *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), 200—209.

Jan Błaż

ON THE EXISTENCE AND BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAYED ARGUMENT

Summary

Under the assumptions 1°—7° (pages 25-26) it is proved, by Tonelli's method, that the Cauchy problem for the system of differential equations with delayed argument of form (1), has at least one solution. If, furthermore, assumptions 1°—4° (page 28) are fulfilled, then each solution $\varphi_\nu(t), \nu = 1, 2, \ldots, n$, of system (1) is bounded in the interval $\langle A, B)$ and the limits

$$\lim_{t \to B} \left| \varphi_\nu(t) - \int_A^t g_\nu(\tau)\, d\tau \right|, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

exist. These theorems generalize author's results [3].

Oddano do Redakcji 1 sierpnia 1969 r.